数理解析研究所講究録
145巻 1972年 147-156

留数理論と超函数
—Local cohomology理論よりみた留数理論—

名大 理　浪川幸彦

留数は一変数解析函数論で良くしられるが、この多変数への拡張は Poincaré, Picard, Leray, Norguet らによってなされた。([5]の文献参照)　特にLerayの仕事([3])は決定的である。こゝでは、この理論を category of "holomorphy" に於て、local cohomology を用いてみなおすことを目標にする。たゞし初等的部分に話を限る。注)

§0. 記号

次の記号達は、最後まで断わりなしに用いる。

X：(複素) n-次元 複素解析多様体。

$\mathcal{O}_X$：X上の正則函数の芽の層。

注) 他に、例えば Cauchy - Fantapié の公式なども、書き直すことができる。

Ω_X^p : X 上の正則 p-形式の芽の層。

Y : X の余次元 d，次元 m の閉部分(解析)多様体。

$U = X - Y$

$j : U \to X$ 自然な単射。

§1. Fundamental quasi-isomorphism.

次のようにして，自然な単射：$\Omega_Y^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{d+p})$ がえられる。任意に $0 \in Y$ をとるとき，0 を中心とする X の局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ で，さらに $Y = \{(x) ; x^{m+1} = \cdots = x^n = 0\}$ となっているものをとる。このとき写像を

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p_{Y,0} & \longrightarrow & \mathcal{H}^d_Y(\Omega_X^{p+d})_0 \\ \omega_0 & \longmapsto & \omega_0 \wedge \left(\dfrac{dx^{m+1}}{x^{m+1}}\right)_0 \wedge \cdots \wedge \left(\dfrac{dx^n}{x^n}\right)_0 \end{array}$$

によって定める。これが座標のとり方によらず，層の単射を与えることがわかる。別に intrinsic な定義の仕方もある。(cf. [2] p.151 ~)

定理(相対的 Poincaré 補題)：上に定義した，

$$\Omega_Y^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{d+p}) \quad (p = 0, \cdots, m)$$

は、外微分 d を微分作用素とする複体の射で、しかもその cohomology はひとしい。とくに、

$$(*) \qquad \mathcal{H}^i(\mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{\cdot})) = \begin{cases} \mathbb{C}_Y & i = d \\ 0 & i \neq d \end{cases}$$

（$\mathbb{C}_Y$ は Y 上の、fibre を $\mathbb{C}$ とする定数層）。

証明：　複体の射であることは、

$$d\left(\omega \wedge \frac{dx}{x}\right) = d\omega \wedge \frac{dx}{x} + (-1)^p \omega \wedge \underbrace{d\left(\frac{dx}{x}\right)}_{=0}$$

よりあきらか。

後半については、導来函手の一般的手法から、(具体的には超曲面で cut してゆく論法により) $d = 1$ の場合に帰着される。Poincaré 補題から、

$$\mathcal{H}^i(\Omega_Y^{\cdot}) = \begin{cases} \mathbb{C}_Y & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}$$

は分っているから、(*) を証明すれば足りる。

話は局所的であるから、

$$X = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{C}^n \ ; \ |x^i| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)\}$$
$$Y = \{(x) \ ; \ x^n = 0\} \subset X$$

としてよい。

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow j_* \Omega_U^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p) \longrightarrow 0$$
（完全）

だから、Xについての Poincaré 補題と併せれば、(＊)はその補題から従う。

補題（Atiyah - Hodge）

$$\mathcal{H}^i(j_*\Omega_U^{\cdot}) = \begin{cases} \mathbb{C}_X & i=0 \\ \mathbb{C}_Y & i=1 \\ 0 & i>1 \end{cases}$$ 。

Atiyah - Hodge の [1] に於ける証明が、そのまゝ用いられる。仲々おもしろいが、少々長くなるので省略する。

系：　$H^i(Y, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_Y^{i+2d}(X, \mathbb{C})$。

この同型を homology にうつした

$$H_i^c(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{i+2d-1}^c(X, \mathbb{C})$$

は、Y の cycle を、Y の管状近傍の境界に射影する写像である。

§2. $\mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^n)$ の積分。

抽象的な一般論はこゝで述べるのはやめるとして、ともかくX上の積分の理論から、次のような積分が定義される。

1) Y上の大域的積分。

$$\int_Y : H^n_Y(\Omega^n_X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

2) とくにXがYにretractできるときは、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & Y \arrow[l] \arrow[dl, "id"] \arrow[l, phantom, shift right=4, "G"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Res} : \mathcal{H}^d_Y(\Omega^n_X) \longrightarrow \Omega^m_Y$$

が定義され、§1で定義した $\Omega^m_Y \longrightarrow \mathcal{H}^d_Y(\Omega^n_X)$ はその右逆写像である。これを留数写像とよぶ。Res はまた、fibre方向のd-次微分形式の芽の層 $\Omega^d_{X/Y}$ を用いて、

$$\mathrm{Res}' : \mathcal{H}^d_Y(\Omega^d_{X/Y}) \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

ともかける。

さて、このように強い条件を加えないと留数写像が定義できないのがholomorphicな場合の特徴である。C^∞なら、Xを、Yに十分近い近傍でおきかえてやればretractが存在するのに対し、holomorphicには、局所的には~~無論~~あるが、大域的(Yについて)には必ずしも存在しない。

§3. 幾つかの応用。

1) $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ を対角線写像(i.e. $x \longmapsto (x, x)$)
$p : X \times X \longrightarrow X$ を第一成分への射影とする。これはΔ

の retract である。ところで $\mathcal{H}^n_{\Delta(X)}(\Omega^n_{X\times X/X})$ には $\mathcal{O}_{X\times X|\Delta(X)}$ が作用しているから、

$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[d, "p"'] & X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dl, "id"] \arrow[dl, phantom, "G", near start, shift right=3] \\ X & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}_{X\times X|\Delta(X)} \times \mathcal{H}^n_{\Delta(X)}(\Omega^n_{X\times X/X}) \longrightarrow \mathcal{H}^n_{\Delta(X)}(\Omega^n_{X\times X/X})$$

$$\xrightarrow{Res'} \mathcal{O}_X$$

なる写像の合成により、自然な写像

$$(**) \qquad \mathcal{H}^n_{\Delta(X)}(\Omega^n_{X\times X/X}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X\times X|\Delta(X)}, \mathcal{O}_X)$$

が定義される。これは容易に分るように単射であるが、全射ではない。しかし、$\mathcal{O}_{X\times X|\Delta(X)}$, $\mathcal{O}_X$ を適当な意味で位相環層とみれば、その連続射の全体と、上の(**)の像とが一致すると思われる。$\Delta(X)$ の決める ideal層を $\mathcal{J}$ とするとき、

$$\mathcal{P} = \varprojlim_{k\geq 0} \mathcal{O}_{X\times X}/\mathcal{J}^{k+1}$$

に離散空間の射影的極限の位相をいれて、その意味で連続な射の全体，（$\mathcal{O}_X$ は離散位相）

$$\mathcal{D}iff = \mathcal{H}om.\mathrm{cont}._{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{O}_X)$$

が，ふつうの微分作用素であることを考えれば (**) は local operator の層のより具体的な意味付けとみられる。

2）たかだか一次の極の特異性をもつ形式の層（Yが余次元1の場合）

§1で定義した $\Omega_Y^{p-1} \longrightarrow \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p)$ の像の、自然な写像 $j_*\Omega_U^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p)$ による逆像を $\Omega_X^p\langle Y\rangle$ とかき、Yにたかだか一次の極の特異性をもつ p-形式の層とよび、自然な射 $\mathrm{res} : \Omega_X^p\langle Y\rangle \longrightarrow \Omega_Y^{p-1}$ を留数写像とよぶ。定義よりあきらかに、次の可換図式がなりたつ。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_X^p \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_X^p\langle Y\rangle \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Omega_Y^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \quad (\text{完全}) \\
0 \arrow[r] & \Omega_X^p \arrow[r] & j_*\Omega_U^p \arrow[r] & \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p) \arrow[r] & 0 \quad (\text{完全})
\end{tikzcd}$$

これらの hypercohomology をとり、§1の定理を用いれば、

命題：　$\mathbb{H}^p(\Omega_X^{\cdot}\langle Y\rangle) \xrightarrow{\sim} H^p(U, \mathbb{C})$

注意：　$\Omega_X^p(Y) = \{\omega \in j_*\Omega_U^p : \omega$ はYでたかだか一位の極をもつ p-形式$\}$ とすれば、一般に $\Omega_X^p\langle Y\rangle \subsetneqq \Omega_X^p(Y)$ である。しかし容易にわかるように、$\Omega^p(Y)$ の閉形式はすべて $\Omega_X^p\langle Y\rangle$ に含まれる。とくに $p = n$ ならば $\Omega_X^n\langle Y\rangle = \Omega_X^n(Y)$ であり、このときの留数写像

$$\mathrm{res} : \Omega_X^n(Y) \longrightarrow \Omega_Y^{n-1}$$

は Poincaré residue map とよばれる。

3) Cauchy - Weil 積分。

§1 でのべた。$\Omega^p_Y \longrightarrow \mathcal{H}^d_Y(\Omega^{d+p}_X)$ が座標によらないことと、積分論とをあわせれば、たゞちにいわゆる Cauchy - Weil 積分の式が えられる。つまり、$Y = \{0\}$ ($0 \in X$) とし、0 を中心とする二種の局所座標を $(x^1, \cdots, x^n)$, $(y^1, \cdots, y^n)$ とすれば、0 の近傍で正則な函数達 g^i_j $(i, j = 1, \cdots, n)$ が存在して、

$$y^i = \sum_j g^i_j x^j$$

とかゝれ、$g = \det(g^i_j)$ は 0 の近傍で 0 にならない。

$\varphi(x)$ を 0 の近傍で正則な函数とすれば、

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \oint_{|y^i|=\varepsilon} \frac{\varphi(y)\, g\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n}{y^1 \cdots y^n}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \oint_{|y^i|=\varepsilon} \frac{\varphi(y)\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n}{y^1 \cdots y^n}$$

$$= \varphi(0)$$

(こゝでは最も単純な場合をとりあつかった。cf [6])

4) Cauchy - Martinelli 積分

Y がまず一般の場合を考える。X 上の C^∞-級 (p, q)-形

式の芽の作工層と $\mathcal{A}^{(p,q)}$ とすれば、これは fine sheaf であるから

$$H_Y^i(\mathcal{A}^{(p,q)}) = 0 \quad (i \neq 1)。$$

従って

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \mathcal{A}^{(p,\cdot)}$$

が resolution である（Grothendieck 補題）ことと併せて、

$$(***) \qquad H_Y^q(X, \Omega^p) = \mathcal{H}^{q-1}(H_Y^1(\mathcal{A}^{(p,\cdot)}))$$

をうる。

さて、$Y = \{0\}$ $(0 \in X)$ の場合にもどろう。0を中心とする局所座標を $(x^1, \ldots, x^n)$ とする。このとき $p = q = n$ での $(***)$ の対応を具体的にみてやると、

$$\frac{dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n}{x^1 \cdots x^n} \longmapsto \frac{(n-1)! \sum_i (-1)^i \bar{x}^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge d\bar{x}^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{x}^i} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^n}{(r^2)^n}$$

$$(r^2 = \sum_i x^i \bar{x}^i)$$

となる。これから、

定理：（Cauchy - Martinelli [4]）

$$S = \{(x) \,;\, \sum x^i \bar{x}^i = \varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0)\}$$

とし、$\varphi(x)$ を S およびその内部で正則な函数とする。このとき、

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(2\sqrt{-1}\pi)^n} \int_S \varphi(x) \frac{\sum_i (-1)^i \bar{x}^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge d\bar{x}^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{x}^i} \wedge \cdots \wedge dx^n}{(r^2)^n}$$

References

[1] Atiyah, M.F. and Hodge, W.V.D. : Integrals of the second kind on an algebraic variety, Ann. of Math., Vol.62(1955), pp56-91.

[2] Hartshorne, R. : Ample subvarieties of algebraic varieties, Lect. Notes in Math. 156, Springer, Berlin, (1970).

[3] Leray, J. : Le problème de Cauchy, III, Bull. Soc. Math. France, Vol.87(1959), pp81-180.

[4] Martinelli, E. : Sur l'extension des théorèmes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes, Colloques sur les fonctions de plusieurs variables, Georges Thone, Liège, (1953)

[5] Norguet, F. : Dérivées partielles et résidus de formes différentielles sur une variété analytique complexe, Sém. Lelong, 1958/59.

[6] Weil, A. : L'integrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann. Vol.111(1935), pp178-182.